Απειροστικός Λογισμός Ι — Μάθημα 17 — 2/12/2015 (1)

Λήμμα: Έστω $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 συνάρτηση (όπου I διάστημα). Αν $a<\beta<\gamma$ τρία στοιχεία του I, τότε είτε $f(a)<f(\beta)<f(\gamma)$ είτε $f(a)>f(\beta)>f(\gamma)$

Απόδειξη:

Εφόσον η f είναι 1-1, τα $f(a), f(\beta), f(\gamma)$ είναι διαφορετικά ανά δύο.

Αρκεί να αποκλείσουμε τις περιπτώσεις: (i) $f(a)<f(\gamma)<f(\beta)$

(ii) $f(\beta)<f(a)<f(\gamma)$

(iii) $f(a)>f(\gamma)>f(\beta)$

(iv) $f(\beta)>f(a)>f(\gamma)$

Δείχνουμε ότι αποκλείεται η περίπτωση (ii).

Αν ίσχυε $f(\beta)<f(a)<f(\gamma)$ στο διάστημα $[\beta,\gamma]$ θα υπήρχε $c\in(\beta,\gamma)$ ώστε $f(c)=f(a)$.

Ισχύει $c\neq a$, αφού $a<\beta$ και $\beta<c$, οπότε άτοπο, διότι η f είναι 1-1.

Παρόμοια, αποκλείονται και οι περιπτώσεις (i), (iii), (iv)

Λήμμα: Αν I διάστημα και $f: I\to\mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 και $a<\beta<\gamma<\delta$ τέσσερα σημεία του I, τότε είτε $f(a)<f(\beta)<f(\gamma)<f(\delta)$ είτε $f(a)>f(\beta)>f(\gamma)>f(\delta)$

Απόδειξη:

$f(\gamma)\neq f(\beta)$, αφού η f 1-1 και διακρίνουμε 2 περιπτώσεις:

(i) $f(\beta)<f(\gamma)$ από το προηγούμενο λήμμα, για την τριάδα $a<\beta<\gamma$ προκύπτει $f(a)<f(\beta)<f(\gamma)$ (I)

από το προηγούμενο λήμμα, για την τριάδα $\beta<\gamma<\delta$ προκύπτει

$f(\beta)<f(\gamma)<f(\delta)$ (II)

Από (I) και (II) προκύπτει $f(a)<f(\beta)<f(\gamma)<f(\delta)$

(ii) $f(\beta)>f(\gamma)$

Παρόμοια με την (i) θα έχω: $f(a)>f(\beta)>f(\gamma)>f(\delta)$

Θεώρημα: Αν I διάστημα και μια συνάρτηση $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1, τότε η f θα είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

Απόδειξη:

Θεωρούμε $\alpha < \beta$ δύο τυχαία σημεία του I. Τότε: $f(\alpha) \neq f(\beta)$ (αφού f 1-1)

Άρα, $f(\alpha) < f(\beta)$ ή $f(\alpha) > f(\beta)$

(i) $f(\alpha) < f(\beta)$ και θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Έστω $x < y$ δύο τυχαία σημεία του I και θα δείξουμε ότι $f(x) < f(y)$.

α) Αν $x = \alpha$ και $y = \beta$ τότε $f(\alpha) < f(\beta) \Rightarrow f(x) < f(y)$

β) Ένα από τα x, y είναι ίσο με α ή β.

Αν $x = \alpha$ τότε είτε $x = \alpha < y < \beta$ οπότε από το πρώτο λήμμα $f(x) < f(y) <$ $(< f(\beta))$, είτε $\alpha < \beta < y$ οπότε πάλι από το πρώτο λήμμα $f(x) < f(\beta) < f(y)$.

Και στις δύο περιπτώσεις $f(x) < f(y)$. Ομοίως, αν $x = \beta$ ή $y = \alpha$ ή $y = \beta$.

γ) Αν κανένα από τα x και y δεν είναι ίσο με α ή με β, τότε από το δεύτερο λήμμα προκύπτει ότι η f διατηρεί τη διάταξη της τετράδας και θα έχουμε $f(x) < f(y)$.

Άρα, η f γνησίως αύξουσα.

(ii) $f(\alpha) > f(\beta)$ με όμοια επιχειρήματα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα

Παρατήρηση: Αν $f: A \to \mathbb{R}$ γνησίως αύξουσα, οπότε 1-1, τότε η $f: A \to f(A)$ είναι 1-1 και επί, τότε $f^{-1}: f(A) \to A$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη:

Πράγματι, έστω $y_1 < y_2$ στο $f(A)$ και θα δείξουμε ότι $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

Αν αυτό δεν ισχύει, τότε θα έχουμε $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα προκύπτει $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) \Leftrightarrow y_1 \geq y_2$.

άτοπο διότι $y_1 < y_2$. Άρα, η $f^{-1}: f(A) \to A$ είναι γνησίως αύξουσα.

Ομοίως, αν $f: A \to \mathbb{R}$ γνησίως φθίνουσα, οπότε η $f: A \to f(A)$ είναι γνησίως φθίνουσα και επί (άρα και 1-1), τότε $f^{-1}: f(A) \to A$ είναι επίσης γνησίως φθίνουσα.

Αν $f: A \to B$ 1-1 και επί, τότε ορίζεται η $f^{-1}: B \to A$. Το (x,y) ανήκει στη γραφική παράσταση της $f \Leftrightarrow$ Το (y,x) ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}. Άρα, αφού τα (x,y) και (y,x) είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο του πρώτου και του τρίτου τεταρτημορίου, προκύπτει πως οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς αυτή την ευθεία.

Θεώρημα: Έστω I διάστημα και $f: I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1 (οπότε η $f: I \to f(I)$ 1-1 και επί). Τότε, η $f^{-1}: f(I) \to I$ είναι επίσης συνεχής.

Απόδειξη:

Από τα προηγούμενα, το $f(I) = J$ ένα διάστημα και η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα. Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (η απόδειξη για γνησίως φθίνουσα είναι όμοια). Τότε, η $f^{-1}: \underset{J}{\overset{\shortparallel}{f(I)}} \to I$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

Έστω $y_0 \in J = f(I)$, υποθέτουμε ότι το y_0 δεν είναι άκρο του διαστήματος (Αν ήταν άκρο η απόδειξη είναι όμοια και μάλιστα ευκολότερη.) Θέτουμε $x_0 = f^{-1}(y_0)$, τότε το x_0 δεν θα είναι άκρο του I. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορώ να υποθέσω (μικραίνοντας σε διαφορετική περίπτωση το ε) ότι $x_0 - \varepsilon \in I$, $x_0 + \varepsilon \in I$. Αναζητούμε $\delta > 0$ ώστε για κάθε $y \in f(I) = J$ με $|y - y_0| < \delta$ να ισχύει $|f^{-1}(y) - \underset{x_0}{\underset{\shortparallel}{f^{-1}(y_0)}}| < \varepsilon$

Εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα και $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$ προκύπτει $f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$. Τότε, $\delta_1 = f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon) > 0$ και $\delta_2 = f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0) > 0$ και ορίζουμε $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

Έχουμε $\underset{f(x_0) - \delta_1}{\underset{\shortparallel}{f(x_0 - \varepsilon)}} < f(x_0) < \underset{f(x_0 + \delta_2)}{\underset{\shortparallel}{f(x_0 + \varepsilon)}}$

Έστω y με $|y - \underset{f(x_0)}{\underset{\shortparallel}{y_0}}| < \delta$, τότε $f(x_0 - \varepsilon) = f(x_0) - \delta_1 \leq y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \leq f(x_0) + \delta_2 \leq f(x_0 + \varepsilon)$

Από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ και μάλιστα αυτό το x είναι μοναδικό, εφόσον η f είναι γνησίως αύξουσα.

$f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon) \xRightarrow[\text{αύξουσα}]{f^{-1} \text{ γνησίως}} f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon)) \Rightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$

Άρα, $|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$.

Οπότε η f^{-1} είναι συνεχής στο τυχαίο σημείο y_0, άρα η f^{-1} είναι συνεχής

<u>Εφαρμογή:</u> $f_a(x)=a^x$

Αν $a>0$ με $a\neq 1$, η συνάρτηση $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ορίζεται, είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα αν $a>1$ και γνησίως φθίνουσα αν $0<a<1$.

<u>Απόδειξη:</u>

Θα δείξουμε ότι η f είναι επί του $(0,+\infty)$.

Εξετάζω την περίπτωση $a>1$.

Έστω $y\in(0,+\infty)$, εφόσον $a>1$ ισχύει $\lim a^n=+\infty$, άρα υπάρχει $n_2\in\mathbb{N}$ ώστε $a^{n_2}>y$, επίσης $0<\frac{1}{a}<1$, άρα $\lim\left(\frac{1}{a}\right)^n=0$, άρα υπάρχει $n_1\in\mathbb{N}$ ώστε $a^{-n_1}<y$.

Εφόσον, $a^{-n_1}<y<a^{n_2}$ και εφόσον f_a είναι συνεχής στο $[-n_1,n_2]$ από το Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, υπάρχει $x\in(-n_1,n_2)$ ώστε $a^x=y$.

Ομοίως, αν $0<a<1$.

Έτσι, η $f_a:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ είναι συνεχής, 1-1 και επί.

Επομένως από το παραπάνω Θεώρημα η $f_a^{-1}:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι 1-1, επί και συνεχής. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται λογαριθμική και συμβολίζεται με $\log_a$.

Από την ιδιότητα $a^{x+y}=a^x\cdot a^y$ προκύπτει για τη λογαριθμική $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$

Αν $a=e$, η εκθετική συμβολίζεται και με exp (δηλαδή $\exp(x)=e^x$).

Το $\log_e$ συμβολίζεται και ln ή log.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$, ένα σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ λέγεται <u>σημείο συσσώρευσης του A</u> αν για κάθε $\delta>0$, υπάρχει $x\in A$ με $0<|x-x_0|<\delta$.

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε $\forall\delta>0$ ισχύει $A\cap[(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)]\neq\emptyset$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u> Το x_0 δεν απαιτείται να ανήκει στο A.

(Μπορεί να ανήκει, μπορεί και όχι)